CENNI SULLA TEORIA DEI SEGNALI

R. GALLO

Abstract. Il presente lavoro contiene alcuni cenni sulla teoria dei segnali e illustra alcuni punti importanti dello sviluppo in serie di Fourier e della analisi spettrale. Vengono dati elementi di analisi matematica di base per trattare i numeri complessi, le misure in decibel etc.

1. Definizione di segnale

Una definizione di segnale non è possible in termini intrinseci. La definizione di segnale poggia sull'assunzione di aver compreso in precedenza alcuni concetti riguardo la comunicazione tra due entità. La definizione di segnale ci porta a trattare temi inerenti la comunicazione, il passaggio di informazione di un punto all'altro, la presenza di tecnologia che si occupa di generare, trasmettere, ricevere e interpretare il **segnale**, appunto, oggetto della comunicazione.

La comunicazione avviene dunque perchè è necessario il passaggio dell'informazione, che rappresenta l'elemento fondamentale del nostro discorso. Siamo in presenza di *informazione* quando questa elimina l'incertezza che era presente nel fenomeno oggetto dello studio (la misura di un parametro fisico ad esempio, valore sconosciuto prima di aver compiuto l'esperimento). L'informazione è veicolata dopo una serie di trasformazioni attraverso un segnale. Gli strumenti che generano, trasmettono, ricevono il segnale hanno come unico obiettivo quello di non perdere il contenuto informativo.

Il segnale dunque, è il mezzo col quale si trasmette l'informazione. Ci è molto utile nello studio dei fenomeni di comunicazione, trattare un segnale come una forma d'onda o meglio come una funzione, nel senso di funzione matematica. Questo perchè si ha una base solidissima per dare un significato ai risultati che si ottengono. Inoltre, con l'avvento dell'elettronica, un segnale può essere facilmente generato tramite i diversi circuiti che usano transistor o amplificatori operazionali. Non ultimo, lo sviluppo delle tecniche digitali, ha portato oggi alla presenza degli strumenti che tutti conosciamo.

1.1. Alcuni strumenti utili per lo studio di un segnale.

1.1.1. *Misure in decibel.* Il guadagno di un circuito si esprime come

$$\mathrm{dB} = 10\log\left(\frac{\text{Potenza} - \text{media} - \text{uscita}}{\text{Potenza} - \text{media} - \text{ingresso}}\right) = 10\log\left(\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}\right) \tag{1.1}$$

Se il circuito si chiude su un carico resistivo avremo:

$$\mathrm{dB} = 20\log\left(\frac{V_{\text{eff}-\text{out}}}{V_{\text{eff}-\text{in}}}\right) + 10\log\left(\frac{R_{\text{in}}}{R_{\text{carico}}}\right) \tag{1.2}$$

Date: March 15, 2002.

Facilmente si scrivono le formule inverse per trovare V,P,I (tensione, potenza e corrente) quando è noto il valore in dB el guadagno del circuito. La scrittura delle formule è lasciata come esercizio. La misura in dB esprime il comportamento del ciruito tra ingresso e uscita, nulla dice del comportamento interno.

1.1.2. *Misura dell'informazione.* La misura dell'informazione è il grado di importanza che il ricevitore assegna al valore ricevuto. La sorgente genera un messaggio scelto da un insieme di partenza. La probabilità che un certo messaggio ha di essere trasmesso è dato dalla formula

$$I_j = \log_2(\frac{1}{P_j})\text{bit} \tag{1.3}$$

La formula va interpretata in questo modo: dato un insieme di messaggi, ognuno dei quali codificato con un certo numero di bit, il contenuto informativo di un messaggio trasmesso è pari alla sua probabilità di essere estratto dall'insieme dei messaggi, minore è la probabilità che il messaggio possa essere trasmesso, maggiore è l'importanza che il ricevitore assegna al messaggio ricevuto

Informazione media. La misura della informazione media di una sorgente è data da

$$H = \sum_{j=1}^{n} P_j I_j = \sum_{j=1}^{n} P_j \log_2(\frac{1}{P_j})\text{bit} \tag{1.4}$$

sempre considerando l'insieme di partenza dal quale sono trasmessi i messaggi. L'informazione media è anche chiamata **entropia della sorgente**.

```
% Esamina come cambia l'entropia al variare della probabilita'.
i = 0;
for (loop = 0:0.05:1)
  i = i+1;
  P1(i) = loop;
  if P1(i) == 0 | P1(i) == 1
    H(i) = 0;
  else
    H(i) = -1/log(2) * (P1(i)*log(P1(i)) + (1-P1(i))*log(1-P1(i)));
  end;
end;
plot(P1,H);
title('Entropy of Binary Source');
xlabel('Probability P1'); ylabel('H(P1)');
```

1.1.3. ***Bontà di un canale di comunicazione.*** Il mezzo sul quale viaggia l'informazione è sempre un mezzo reale non ideale. Come tale al segnale presente sul mezzo si sommano disturbi di varia natura. Questi disturbi dipendono dal mezzo scelto e dalla tecnologia: un segnale elettrico subirà una resistenza dovuta al mezzo, alle onde eletromagnetiche presenti ecc. Un segnale ottico, che corre su fibra, avrà altri tipi di disturbi. Ad ogni modo l'obiettivo principale, citato nel l'introduzione, viene a mancare e cioé che il segnale giunga corretto alla destinazione. Come si misura la bontà di un canale di comunicazione affetto da disturbi? Ovvero è possibile costruire un canale di comunicazione esente da errori? Definiamo **B** la larghezza di banda in Hz del canale, cioè la massima frequenza supportata dal canale, **S** il segnale e **N** il rumore (noise) entrambe espressi in Volt, allora

$$C = \mathrm{B} * \log_2(1 + \frac{S}{N}) \tag{1.5}$$

è detta *capacità del canale* di poter trasmettere senza errori su un canale con larghezza di banda B, un segnale affetto da rumore gaussiano

Nell'esempio seguente, sintassi Matlab-like, c'e una applicazione della (1.5). Si lascia come esercizio la prova dello script

```
% B  la banda passante in HZ.  Nota: 3700 Hz
% e' il valore tipico di B del sistema telefonico su doppino
B = 3700;
SNRdB = 0:6:60;
SNR = zeros(length(SNRdB),1);
for (i = 1:1:length(SNRdB))
  SNR(i) = 10^(SNRdB(i)/10);
end;
C = B/log(2)*log(1 + SNR);
plot(SNRdB,C); grid;
xlabel('SNR in dB'); ylabel('Capacity in bits/sec');
title('Shannon Channel Capacity');
```

`Esercizio`. Si vuole aggiungere un modem al proprio PC per connettersi a Internet. Sapendo che la linea é affetta da un rapporto segnale-rumore pari a **S/N**=25dB e che la banda passante $B = 300 \div 3200$ Hz, calcolare la velocitá del modem perché possa lavorare senza errori?

1.1.4. ***Valore medio di un segnale.*** La componente continua (o valore medio) di un segnale w(t) (sia esso di tensione o di corrente) si calcola come

$$W_m = W_{\mathrm{dc}} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} w(t) dt \tag{1.6}$$

Fare attenzione a quando si applica la (4) perchè bisogna distinguere tra segnale con durata infinita e segnale con durata finita come sono quelli con cui comunemente si lavora. Un segnale *fisicamente realizzabile* ha sempre un inizio (quando si accende la sorgente) e una fine (quando si spegne).

1.2. **Numeri Complessi.** L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ estende le proprietà che finora sono state usate per l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Dal punto di vista insiemistico, il dominio sul quale lavorano i numeri complessi è costituito dalla coppia di insieme dei $\mathbb{R}$. L'origine dei numeri complessi nasce quando si cerca di dare soluzione all'equazione:

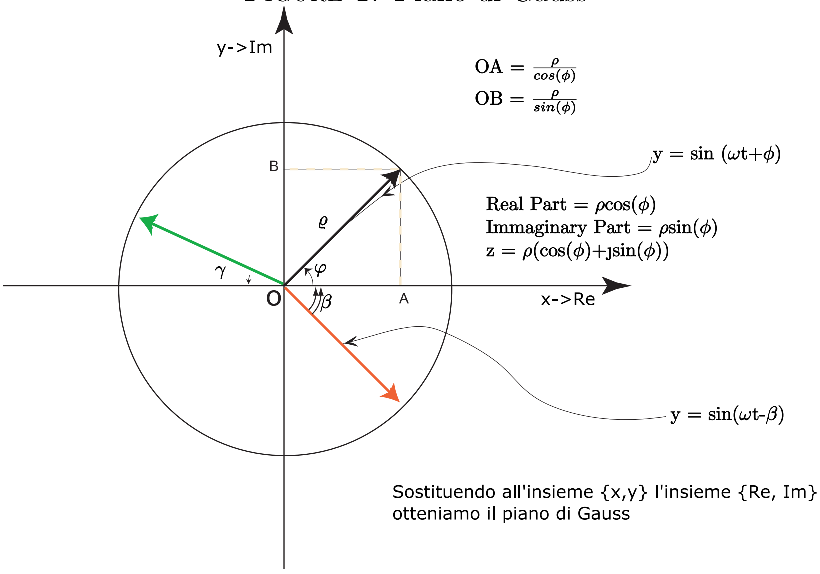
$$x^2 + 1 = 0 \tag{1.7}$$

La soluzione esiste solo se introduciamo un nuovo insieme $\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, prodotto cartesiano della coppia di insiemi dei numeri reali. La soluzione della (7) come sappiamo è

$$x = \sqrt{-1}$$

Per definizione questo valore è pari all'unità immaginaria $\jmath$. Un numero complesso si definisce come z=x+$\jmath y$. Ogni numero complesso possiede un

FIGURE 1. Piano di Gauss



complesso coniugato dato da $\overline{z}$=x-$\jmath y$. Il prodotto $z\overline{z}$ $= x^2$+y^2, che ci da anche l'esempio dell'applicazione dei numeri complessi ai polinomi. Sull'insieme dei numeri complessi sono definite le 4 operazioni. Siano dati 2 numeri complessi z_1=a+$\jmath b$ e z_2=c+$\jmath d$

Somma. z_3=z_1 + z_2=$(a$+$c)$+$\jmath(b$+$d)$

Differenza. z_3=z_1 $-$ z_2=$(a$-$c)$+$\jmath(b$-$d)$

Prodotto. z_3=$z_1 * z_2$=$(a$*$c)$+$\jmath(a$*$d)$ +$\jmath($ b*$c)$ -$(b$*$d)$

Quoziente. z_3=$\frac{a+\jmath b}{c+\jmath d}$=$\frac{z_1}{z_2}$=$\frac{(a+\jmath b)(c-\jmath d)}{(c+\jmath d)(c-\jmath d)}$ il quoziente si calcola moltiplicando numeratore e denomitatore per il complesso coniugato. Si lascia come esercizio il calcolo delle 4 operazioni quando a,b,c,d assumono valori in $\mathbb{R}$.

Modulo numero complesso. Il modulo di z=x+$\jmath y$ è pari a

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.8}$$

Fase numero complesso. La fase è data da

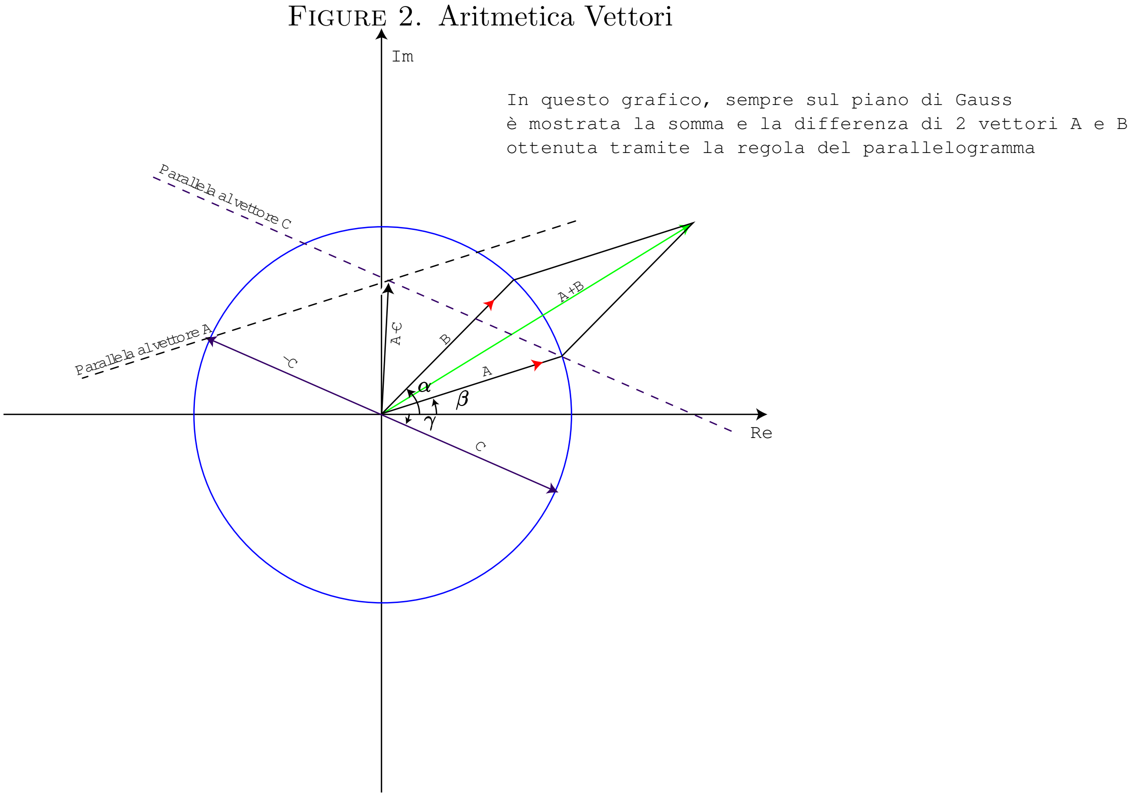
$$\varphi = \text{arctg}(-\frac{y}{x}) \tag{1.9}$$

Queste ultime due formule sono visibili in figura 1

Esercizi. Siano z_1=a+$\jmath b$ e z_2=c+$\jmath d$ calcolare il prodotto $z_1 * \overline{z}_2$ e il quoziente $\frac{z_1}{\overline{z}_2}$ sotto forma cartesiana.

1.2.1. *Altra rappresentazione dei numeri complessi.* Poichè un numero complesso è formato dalla coppia di numeri reali, possiamo visualizzarlo su di un piano cartesiano dove la parte reale occupa l'asse delle x e la parte immaginaria le ordinate. In questa rappresentazione, il piano cartesiano prende il nome di piano di Gauss. Nella fig.1 sono presentate le trasformazioni necessarie a passare da rappresentazione cartesiana a quella polare introducendo i valori di modulo e fase. I numeri complessi possono essere scritti in diversi modi per facilitare le operazioni aritmetiche viste in precedenza. Nello

FIGURE 2. Aritmetica Vettori



studio dei fenomeni elettrici poi, i numeric complessi sono scritti in forma polare, forma trigonometrica e forma esponenziale. La trasformazione da una rappresentaione ad un'altra è possibile grazie alla famosa formula di Eulero che mette in relazione funzioni trigonometriche ed esponenziali

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{e^{\jmath\alpha} - e^{-\jmath\alpha}}{2\jmath} \\ \cos(\alpha) &= \frac{e^{\jmath\alpha} + e^{-\jmath\alpha}}{2} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Come esercizio si risolva il sistema di equazioni dove le incognite sono $e^{\jmath\alpha}$ e $e^{-\jmath\alpha}$

1.2.2. *Algebra vettoriale.* Con i numeri complessi capita di dover lavorare con i vettori. Si ricorda che un vettore in fisica è un oggetto che possiede un punto di applicazione, una direzione e un verso. Nella rappresentazione con cerchio trigonometrico, le operazioni fra vettori sono eseguite in modo grafico. Somma e sottrazione di vettori sono mostrati nella figura 2

1.3. **Conclusioni.** In questa introduzione sono stati dati alcuni cenni alla definizione di segnale e ai metodi matematici necessari ad affrontare l'argomento. Gli strumenti matematici presentati, sono indispensabile supporto per poter effettuare i calcoli nello studio della teroia dei segnali. Non si vuole in questa sede presentare in maniera rigorosa la teoria matematica che sta dietro alle formule; il nostro obiettivo è quello di comprendere il funzionamento di certi fenomeni, e questo lo si può fare solo se si ha un minimo bagaglio matematico.

2. Sviluppo in serie di Fourier

Lo sviluppo in serie di funzioni di Fourier ci dice che una funzione qualunque continua e derivabile almeno una volta, può essere scritta sotto forma di

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(\mathrm{k}\omega\mathrm{t}) + b_k \sin(\mathrm{k}\omega\mathrm{t}) \tag{2.1}$$

dove i coefficienti a_o, a_k, b_k si calcolano secondo le formule

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \tag{2.2}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\mathrm{k}\omega\mathrm{t})dt \tag{2.3}$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\mathrm{k}\omega\mathrm{t})dt \tag{2.4}$$

La funzione **f(t)** può essere ricostruita come somma di infinite sinusoidi, ognuna delle quali pesate dal coefficiente moltiplicativo a_k, b_k. Ogni sinusoide lavora ad una frequenza man mano cresente. Nonostante la formula all'apparenza possa sembrare complessa, gli esempi successivi mostreranno che si deve porre solo un po' di attenzione nel sostituire i risultati ottenuti dagli integrali, nella (2.1). I valori a_o, a_k, b_k si chiamano *armoniche* del segnale.

2.1. Svillupo della serie di Fourier in forma complessa.

Un modo alternativo per esprimere la serie (2.1) consiste nello sfruttare le relazioni di Eulero (1.10), sostituendo a $sin(kwt)$ e $sin(kwt)$ il loro valore in forma complessa. Sostituendo la (1.10) nella (2.1) si ha

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k(\frac{e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}}{2}) + b_k(\frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{2j}) \tag{2.5}$$

raggruppando i termini in $e^{jk\omega t}$ e i termini in $e^{-jk\omega t}$ dopo alcuni passaggi matematici si ottiene, eliminando l'unitá immaginaria al denominatore

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (\frac{a_k - b_k}{2})e^{jk\omega t} + (\frac{a_k + b_k}{2})e^{-jk\omega t} \tag{2.6}$$

A questo punto estendiamo i limiti della sommatoria in modo che l'indice k sia $-\infty \leq k \leq \infty$. Inoltre definiamo i seguenti coefficienti

$$C = \begin{cases} c_{-n} = \frac{a_k+b_k}{2} \\ c_n = \frac{a_k-b_k}{2} \\ c_0 = \frac{a_0}{2} \end{cases}$$

Al termine di questi calcoli la serie di Fourier puó essere scritta come

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jk\omega t} \tag{2.7}$$

dove i coefficienti c_n sono calcolati come

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) e^{jk\omega t} dt \tag{2.8}$$

Fare attenzione nel confronto della (2.1) con le ultime equazioni scritte, agli estremi di integrazione e ai limiti inferiore e superiore della sommatoria. In particolare il valore di c_n é calcolato sul doppio del periodo rispetto alla sommatoria.

2.2. **Teorema di Parseval.** Un risultato di estrema importanza riguarda il contenuto energetico del segnale, ovvero la potenza che il segnale riversa sul mezzo trasmissivo. Per definizione l'energia di un segnale é data da

$$E = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t))^2 dt \tag{2.9}$$

Si dimostra che

$$E = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t))^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k^2 + b_k^2 \tag{2.10}$$

Che risulta di notevole utilitá in campo pratico, in quanto evita di calcolare l'integrale conoscendo il valore dei coefficienti della serie di Fourier. Il calcolo dei coefficienti puó essere agevolato dai molti metodi numerici presenti nei programmi di calcolo come Matlab o Scilab.

La serie e la trasformata di Fourier, sono gli strumenti ad oggi piú usati nella trasmissione dei segnali. La moderna tecnologia fa ampio uso dei risultati dell'analisi di Fourier. Tutte le moderne applicazioni nel campo digitale sono possibili grazie ai risultati di questa analisi. Ma perché é cosí importante lo studio della serie e della trasformata di Fourier? In matematica esiste un teorema detto delle funzioni immagine che ci consente di passare da un dominio di lavoro ad un altro. Il teorema si puó scrivere

$$\mathcal{F}(\sigma) = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \tag{2.11}$$

Lavorare nel dominio di σ é utilissimo nel calcolo differenziale e integrale perché dove, nei calcoli, sono presenti derivate si sostituiscono prodotti e dove sono presenti integrali si sostituiscono quozienti. Per avere il risultato nel dominio di partenza cioé nel dominio di t, si usa la *antitrasformata.* Al momento, tuttavia, questo argomento esula dagli scopi di questo lavoro.

3. Esempi di calcolo della serie di $\mathcal{FOURIER}$

Il grafico di fig. 3 rappresenta un'onda quadra, si vuole scrivere lo sviluppo in serie di $\mathcal{FOURIER}$ applicando la 2.1, calcolando prima i coefficienti a_k, b_k. L'onda presenta un periodo di π e un'ampiezza di 1V. La funzione puó scriversi come

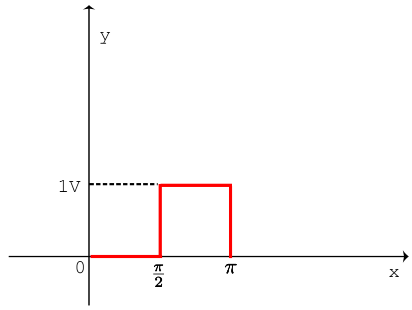


FIGURE 3. Onda Quadra

$$f(t) = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & : \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases} \tag{3.1}$$

La definizione della f(t) 3.1 é differente rispetto alla convenzione usata finora. La 3.1 rappresenta una funzione discontinua che assume valori diversi a seconda dell'intervallo di definizione. Cominciamo con applicare la 2.2

$$a_0 = \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)dt = \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dt + \tfrac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1dt =$$

L'operatore di integrazione é un operatore lineare quindi possiamo sdoppiare la formula nelle due parti, quella relativa all'intervallo $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ e quella relativa all'intervallo $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$. L'integrale con 0 scompare e rimane il secondo. Integrando otteniamo il risultato:

$$= \tfrac{2}{\pi} \left[t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1$$

Vediamo la 2.4

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0sin(k\omega t)dt + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1sin(k\omega t)dt = \tag{3.2}$$

Di nuovo, applicando la linearitá nel calcolo rimane solo il secondo integrale. Prima di procedre osserviamo che l'argomento del seno $k\omega t$ puó essere trasformato tendendo conto del periodo della curva in esame. Il periodo dell'onda quadra é $T = \pi$, il valore di $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$. Sostituento il periodo T otteniamo $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ dopo aver semplificato. La 2.4 si puó scrivere, dopo aver sostituito ω come:

$$b_k = \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)dt = \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 0sin(2kt)dt + \tfrac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1sin(2kt)dt =$$

risolviamo il secondo integrale trovando la primitiva di $sin(2kt)$

$$= \tfrac{2}{2\pi k} \left[-cos(kt)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \tfrac{2}{2\pi k} \left[cos(k\pi) - cos(2k\pi)\right] =$$

Dalla trigonometria ricordiamo che $cos(2A) = 2cos^2(A) - 1$, quindi se poniamo $A = k\pi$ otteniamo il valore finale dei coefficienti a_k ovvero:

$$b_k = \frac{1}{\pi k} \left[1 + cos(k\pi) - 2cos^2(k\pi)\right] \tag{3.3}$$

Per il coefficienti a_k ripetendo lo stesso procedimento applicato alla 2.3 otteniamo 0. Questo perché nonostante la funzione in esame non é né pari, né dispari, aver scelto come periodo π ha semplificato i calcoli. Non ci resta ora che sostituire i valori trovati per a_k e b_k nella (2.1) ottenendo

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\pi k} \left[1 + cos(k\pi) - 2cos^2(k\pi)\right] \sin(2\mathrm{kt}) \qquad (3.4)$$

Dove a ω abbiamo sostituito il valore $\frac{2\pi}{\pi}$ per i motivi spiegati in precedenza. A questo punto non rimane che sviluppare la 3.4 calcolando la $f(t)$ per diversi valori di k. Il codice che segue, sintassi Matlab-like, svolge appunto questo compito

```
%   calcolo coeff fourier per la function onda quadra periodo p=0<p<pi
%   vale 0 per 0<p<pi/2 e 1 per pi/2<p<pi
N = 10;
n = 1:1:N;
for i=1:N
    bn(i) = 1/(pi*i)*(1+cos(i*pi)-2*(cos(i*pi)^2));
end;
%   asse temporale del periodo
t = -pi:pi/1000:pi;
for i=1:N
    g(i,:) = bn(i)*sin(2*i*t);
end;
pt = g(1,:);
for i=2:N
    pt = pt + g(i,:);
end;
% sommiano la componente continua
pt = pt+1/2;
subplot (2,1,1); plot (t, pt); grid;
subplot (2,1,2); stem (-bn); grid
```

La fig.3 mostra la riproduzione della (2.1) secondo lo sviluppo in serie. Nella figura é mostrato anche lo spettro, ovvero le armoniche del segnale. Si é scelto come esempio il calcolo della serie per la 3.1 perché l'onda quadra risulta fondamentale nei sistemi digitali. Alcuni commenti sono necessari per spiegare quali implicazioni pratiche sono contenute nella (2.1).

- Una prima osservazione da fare riguarda il grafico di fig.3. In questo grafico si vede come una funzione discontinua sia stata riprodotta da una serie di somme di funzioni continue. Questo é possibile grazie al teorema di Dirichlet che afferma che lo sviluppo in serie é possibile anche nei punti di discontinuitá, se in quei punti si sostituisce la media della somma della parte destra con la parte sinistra della funzione. Anche se il teorema assicura l'esistenza dello sviluppo in serie per funzioni con punti di discontinuitá, si deve ricordare che la $f(t)$ viene ricostruita tramite somme di funzioni continue. Questo porta alle oscillazioni presenti nei punti di discontinuitá che hanno valore superiore a quello del segnale $f(t) > 1$. Questo comportamento é chiamato fenomeno di Gibbs

- La 3.1 non verrebbe riprodotta in modo cosí fedele, se l'apporto di seno e coseno non fosse moltiplicato per un opportuno coefficiente, a_k o b_k, che *pesa* la funzione nella serie. Se il cefficiente é 0 il termine non é presente nel calcolo. I primi quattro termini dello sviluppo sono mostrati in fig.5 ognuna presa singolarmente. Il coefficiente $\frac{a_0}{2}$ assume un significato particolare. La sola sommatoria dei termini della 2.1 porta a una funzione con valore medio nullo, cosa che non risulta dal grafico. Un segnale con valore medio nullo é un segnale di sola alternata. Il valore $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$ vuol dire che il segnale ha una componete continua che mi trasla il segnale verso l'alto ovvero che il segnale non ha valori negativi. In termini elettronici lo si puo' vedere come un generatore composto da una batteria piú un generatore di onda quadra
- Ogni termine presente nella serie, oltre ad essere pesato per il proprio coefficiente, porta il suo contributo in frequenza. Come si vede dalla fig.3, man mano che l'indice k avanza, la frequenza del seno (o coseno) aumenta e la somma dei primi 2, primi 3, primi 4 termini, man mano approssima sempre meglio il segnale originale.
- L'esame della fig.3 ci porta ad una conclusione molto importante, che é poi lo scopo finale dell'esempio fatto. Per funzioni che presentano punti di discontinuitá, lo sviluppo in serie deve calcolare molti termini della 2.1, perché solo dopo molte iterazioni la funzione finale

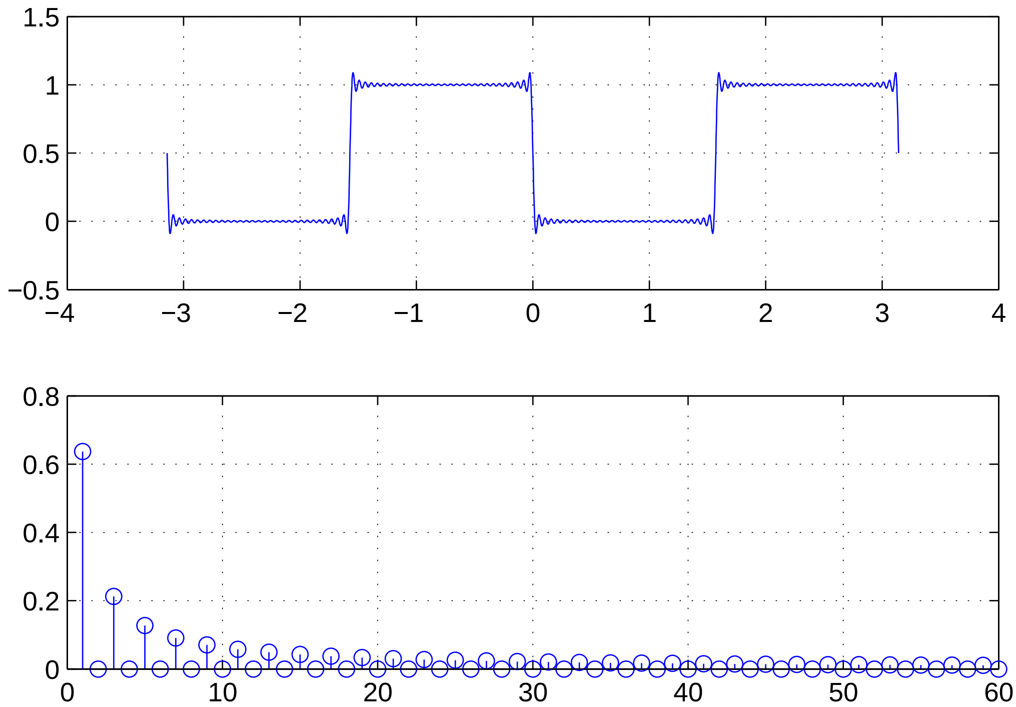


Figure 4. Onda quadra come sviluppo in serie di Fourier

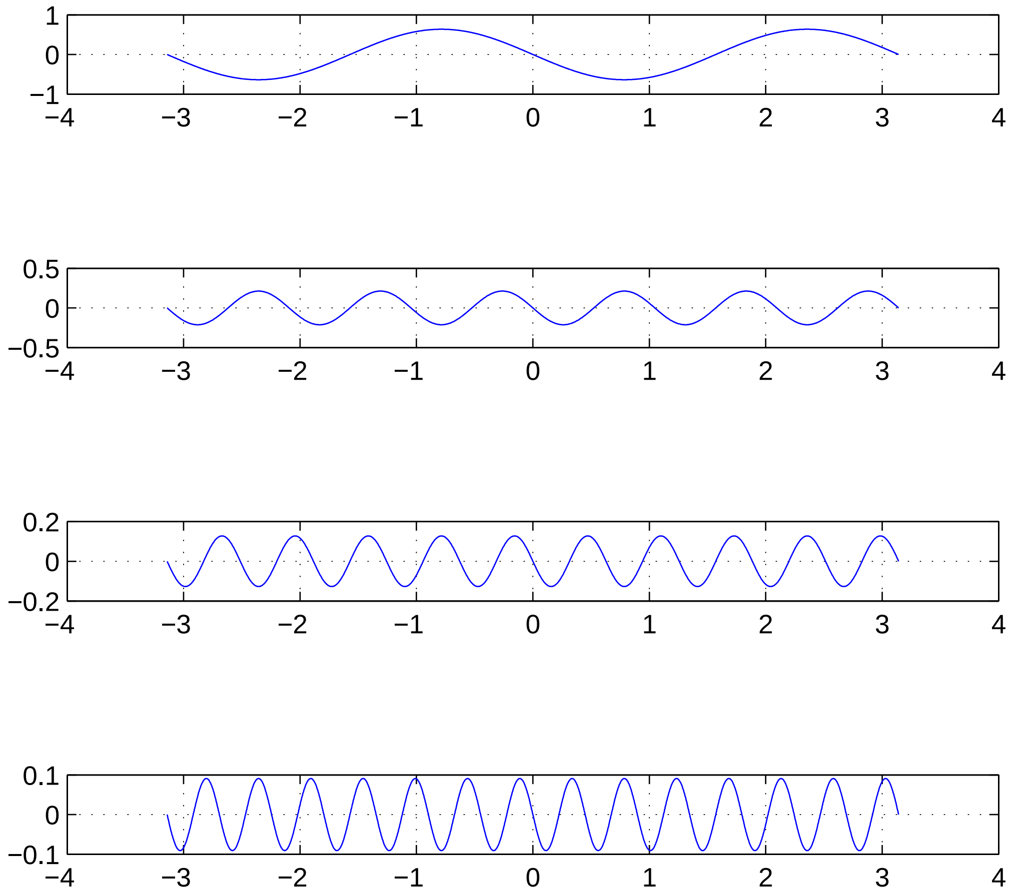


Figure 5. 1,3,5,7 termine dello sviluppo in serie

approssima quella di origine. Ora immaginiamo che la 3.1 rappresenti proprio il segnale digitale che viene trasmesso tra sorgente e destinazione. Chi riceve il segnale deve essere sicuro che rappresenti esattamente quello inviato dalla sorgente. Se la destinazione riceve il 2° termine della fig.3 come fa a risalire al segnale originale? Lo tratterá come un segnale corretto oppure lo scarta chiedendo alla sorgente una nuova trasmissione? Nella fig.3 sono state calcolate 60 iterazioni, ovvero 60 armoniche.

- Come ultima considerazione diciamo che l'uso dei segnali digitali comporta una serie di accorgimenti che riguardano l'hardware. In

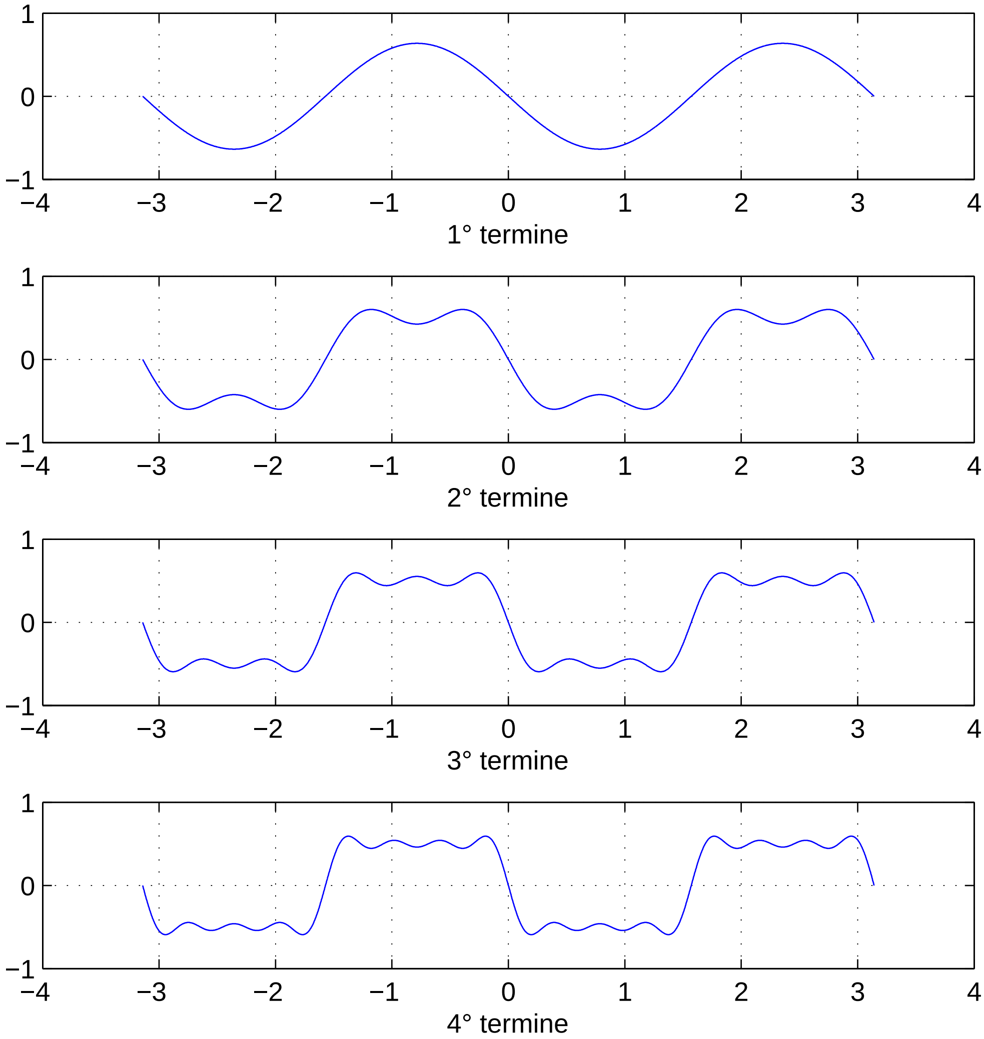


FIGURE 6. Somma dei 1,3,5,7 termini della serie

primo luogo la scelta della lienea di trasmissione sulla quale corre il segnale, e poi l'elettronica che trasmette o riceve il segnale. In particolare i mezzi trasmissivi, siano essi elettrici o ottici, devono garantire una banda passante sufficiente a far passare, appunto, il necessario numero di termni della serie di $\mathcal{FOURIER}$, tale da garantire al ricevitore di poter ricostruire il segnale ricevuto, senza incertezza.

(Istituzione) ITIS A.VOLTA - GUIDONIA

Banda	**Nomenclatura**	**Caratteristiche propagazione**	**Usi**
3-30khz	Very Low Freq. VLF	Onde di superficie, bassa attenuazione notturna e diurna forti disturbi atmosferici	Navigazione comunicazioni subacque
30-300khz	Low Freq LF	Come VLF attenuazione diurna	comunicazione navali Radiofari
300-3000khz	Medium Frequency MF	Onde di superficie ionosferica notturna bassa attenuazione notturna alta diurna	Comunicazioni Navali radiolocalizzazione radiodiffusione AM
3-30Mhz	High Frequency HF	La riflessione ionosferica varia durante al giornata, la sagione e a seconda della frequenza; ba rumore atmosferico a 30Mhz	Radioamatori, radiodiffsione internazionale comunicazioni militari navali e aeronautiche a grande distanza telefono, telegrafo
30-300Mhz	Very High Freq (VLF)	Propagazione quasi in visibilitá con diffusione per inversione di temperatura	Televisione, radiodiffusione FM comunicazioni aereounatiche AM
0.3-3Ghz	Ultra High Freuqency UHF	Propagazione in visibilitá	Televisione, telefonia cellulare, radar, GPS, ponti radio a microonde
1.0-2.0 2.0-4.0 3-30Ghz	L S Super High Freq SHF	Propagazione in visibilitá attenuazione da pioggia sopra i 10Ghz dovuta a ossigeno e vapore acqueo	Radar, comunicazioni punto-punto radiodiffusione via satellite ponti radio
2.0-4.0 4.0-8.0 8.0-12.0 12.0-18.0 18.0-27.0 27.0-40.0 26.5-40.0 30-300Ghz	S C X Ku K Ka R Extremly high Freq EHF	Come banda precedente	Radar, comunicazioni via statellite sperimentali
27-40 26.5-40 33-50 40-75 75-110 110-300 $10^3 - 10^7 Ghz$	Ka R Q V W onde millimetriche, infrarosso luce visibile, ultravioletto	propagazione in visibilitá	Comunicazioni ottiche su fibra

TABLE 1. BANDE DI FREQUENZA